Bölüm 12 Rijit Cismin Düzlemde Kinetiği: İmpuls ve Momentum

12.1 KONUYA BAKIŞ

Parçacık için impuls ve momentum ilkesi Bölüm 5 te anlatılmıştı. Hatırlatmak istersek, hareket denklemi önce zamana göre integre edilmiş ve daha sonra parçacığa etkiyen kuvvetler ile parçacığın hızı zaman parametresi üstünden ilişkilendirilmişti. Bağıntıları kullanabilmek için, *kuvvet zamanın fonksiyonu olacak biçimde ifade edilebilmeli* ve güvenilir sonuçlara ulaşabilmek için *kuvvet çok kısa bir süre için etkiyor olmalıdır.* Bu bölümde, yukarıdaki açıklamalar altında, cismin düzlemsel hareketi için *doğrusal ve açısal impuls–momentum* ilkesi türetilecek. Tabii cisimde boyutların devreye girmesi bizi bazı yeni kavramlarla tanıştıracak.

12.2 CİSİMDE DOĞRUSAL İMPUS – MOMENTUM İLKESİ

DOĞRUSAL MOMENTUM: Bölüm 6 da parçacıklar topluluğuna doğrusal momentum ilkesi uygulanırken tüm parçacıkların momentumlarının vektörel toplamı $\mathbf{G} = \Sigma m_i \mathbf{v}_i$ yazılmıştı. Öte yandan, momentumu kütle merkeziyle ilişkilendiren bağıntı $\Sigma m_i \mathbf{v}_i = m\mathbf{v}_M$ den yararlanırsak, *doğrusal momentum*,

$$\boxed{\mathbf{G} = m\mathbf{v}_M} \tag{12.1}$$

olur.

İMPULS – MOMENTUM İLKESİ: Ötelenen cisimde hareket denklemi,

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_M = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_M}{\mathrm{d}t} \tag{12.2}$$

dir. Eğer $t = t_A$ anında cisim A noktasında iken kütle merkezi hızı $(\mathbf{v}_M)_A$ ise ve $t = t_B$ anında B noktasındaki hızı $(\mathbf{v}_M)_B$ ise, (12.2) integre edilebilir. Böylece *doğrusal impuls–momentum ilkesi*, olur. Bazen hesapları sabit O noktası için yapmak daha uygun olabilir. Bu durumda O noktasına göre açısal momentum,

$$\mathbf{H}_O = I_M \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}_M \times (m \mathbf{v}_M) \tag{12.24}$$

olur. Düzlemsel harekette açısal momentum z ekseni yönünde bir vektördür. O halde, dairesel hareket yapan cisimde, vektörel bir ifade olan (12.24) sakaler yapıya getirilirse,

$$+\circlearrowleft \quad H_O = I_M \omega + r_M (m v_M) \tag{12.25}$$

olur. O noktasına göre kütle eylemsizlik momenti $I_O = I_M + m r_M^2$ ve kütle merkezinin hızı $v_M = \omega r_M$ olduğuna göre, bunlar (12.25) de yerleştirilirse, ifade daha da sadeleşir ve cismin sabit O noktasına göre açısal momentum,

$$+\circlearrowleft \quad H_O = I_O \omega \tag{12.26}$$

biçiminde elde edilir.

ÖZET BİLGİ

- Genel hareket içinde açısal hızı $\boldsymbol{\omega}$ olan bir cisimde:
  Doğrusal momentum : $\mathbf{G} = m\mathbf{v}_M$
  Açısal momentum (Kütle merkezi M ye göre) : $\mathbf{H}_M = I_M \boldsymbol{\omega}$
  Eğer açısal momentumu kütle merkezinden farklı bir nokta olan P de hesaplamak istersek,
  $$\mathbf{H}_P = I_M \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}_M \times (m \mathbf{v}_M)$$
  olur. Burada $\mathbf{r}_M$, cismin kütle merkezi M nin P noktasına göre konum vektörüdür. P noktası ile $\mathbf{v}_M$ hızının doğrultusu arasındaki dik uzaklığa e dersek, yukarıdaki ifadenin skaler hali:
  $$H_P = I_M \omega + e m v_M$$
- Eğer cisim sadece öteleniyorsa $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ olacağından, kütle merkezine göre açısal momentum $\mathbf{H}_M = \mathbf{0}$ dır ve sadece doğrusal momentum $\mathbf{G} = m\mathbf{v}_M$ vardır. Eğer bu durumda P gibi keyfi bir nokta için açısal momentum hesaplanacaksa, $H_P = e m v_M$ olur.
- Eğer cisim bir O noktası etrafında dönüyorsa, doğrusal momentumu ile M noktasına göre açısal momentumu,
  $$\mathbf{G} = m\mathbf{v}_M \quad , \quad \mathbf{H}_M = I_M \boldsymbol{\omega}$$
  Sabit O noktasına göre açısal momentum
  $$\mathbf{H}_O = I_O \boldsymbol{\omega}$$
  olur. Burada I_O, O noktasına göre eylemsizlik momentidir.

12.4 CİSİMDE AÇISAL İMPULS – MOMENTUM İLKESİ

Rijit cismin düzlemde genel hareketini incelerken, cisimde kütle merkezi M ye göre yazılan dönel hareket denklemi $\Sigma M_M = I_M \alpha$ da açısal ivme için $\alpha = \mathrm{d}\omega / \mathrm{d}t$ yi yerleştirirsek,

$$\Sigma M_M = I_M \alpha \quad \Rightarrow \quad \Sigma M_M = I_M \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \tag{12.27}$$

olur. Burada I_M nin sabit bir değer olduğunu biliyoruz. Eğer cismin açısal hızı t_A anında ω_A ve t_B anında ω_B ise, buna göre (12.27) integre edilerek M noktası için yazılacak *açısal impuls–momentum ilkesi*,

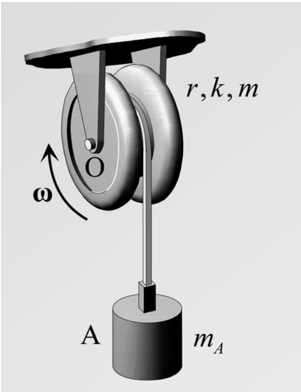
$$\Sigma \int_{t_A}^{t_A} M_M \, \mathrm{d}t = I_M \omega_B - I_M \omega_A \tag{12.28}$$

biçiminde elde edilir. Eğer cisim O noktasından geçen ve hareket düzlemine dik sabit bir eksen etrafında dönüyorsa, bu noktaya göre yazılacak dönel hareket denklemi $\Sigma M_O = I_O \alpha$ integre edilerek, O noktasına göre *açısal impuls–momentum ilkesi*:

$$\Sigma \int_{t_A}^{t_A} M_O \, \mathrm{d}t = I_O \omega_B - I_O \omega_A \tag{12.29}$$

bulunur.

ÖRNEK 12-2 Şekil P_2.1 deki makaraya sarılı olan kablonun ucuna asılı kütle $m_A = 19\,\mathrm{kg}$ dır. Makaranın eylemsizlik yarıçapı $k = 0.8\,\mathrm{m}$, kütlesi $m = 5\,\mathrm{kg}$ ve kablonun sarılı olduğu diskin yarıçapı $r = 0.1\,\mathrm{m}$ dir. Eğer başlangıçta diskin açısal hızı $\omega_1 = 3\,\mathrm{rad/sn}$ ise, $6\,\mathrm{sn}$ sonra ipin ucundaki kütlenin hızını bulunuz.



Şekil P_2.1

ÇÖZÜM: Makara ve kütlenin Şekil P_2.2 deki SCD da:

$$W = mg = 5 \times 9.81 = 49\,\mathrm{N}$$
$$W_A = m_A g = 19 \times 9.81 \cong 186.4\,\mathrm{N}$$
$$I_O = mk^2 = 5 \times 0.8^2 = 3.2\,\mathrm{kg\,m^2}$$

A Kütlesi: Şekil P_2.2 de belirtildiği gibi kütlenin aşağıya doğru olan hareketi negatif y ekseni yönünde. Kablo kuvveti T olsun. Buna göre doğrusal impuls–momentum ilkesi yazılırsa,

$$+\uparrow \qquad m_A v_1 + \Sigma \int F_y \, \mathrm{d}t = m_A v_2$$