Bölüm 14 Rijit Cismin Uzayda Kinetiği

14.1 KONUYA BAKIŞ

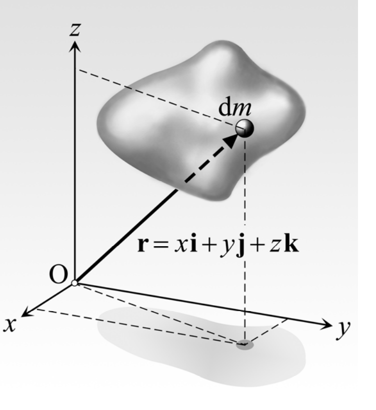
Rijit cismin düzlemde kinetiği ile uzayda kinetiği arasındaki farklılık sadece üçüncü boyutun hesaplara girmesiyle sınırlı değildir. Düzlemsel harekette, cismin kütle merkezine göre yazılan dönel hareket denklemi $\Sigma M_M = I_M \alpha$ da kullanılan eylemsizlik momenti I_M kütle merkezi M den hareket düzlemine dik doğrultuda geçen eksene göre hesaplanmıştı ve bu cismin kesit geometrisiyle ilgili bir sayı idi. Halbuki cismin üç boyutlu hareketi için dönel hareket denklemi yazıldığında, *eylemsizlik momenti* birbirinden bağımsız altı bileşeni olan bir *tansörel* büyüklüktür. Bunlardan üç tanesi *eksenlere göre eylemsizlik momenti* diğer üç tanesi ise *çarpım eylemsizlik momenti* olarak adlandırılır.

14.2 EYLEMSİZLİK MOMENTLERİ

Bölüm 10.2 de bir eksen için anlatılanları şimdi birbirine dik üç eksen için genişletelim.

Eksenlere Göre Kütle Eylemsizlik Momentleri: Şekil 14.1 de bir rijit cisim ve bir de eksen takımı $\mathrm{O}(x, y, z)$ görülüyor. Buna göre; cisimdeki bir diferansiyel kütle elemanı $\mathrm{d}m$ nin konum vektörüne $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ dersek, cismin eksenlere göre kütle eylemsizlik momentleri,

$$
\begin{aligned}
I_{xx} &= \int_m \left(y^2 + z^2\right)\mathrm{d}m \\
I_{yy} &= \int_m \left(x^2 + z^2\right)\mathrm{d}m \\
I_{zz} &= \int_m \left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}m
\end{aligned}
\tag{14.1}
$$

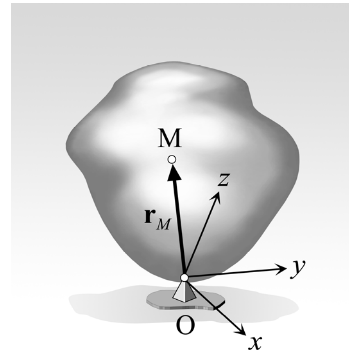


Şekil 14.1

olur. Eksenlere göre kütle eylemsizlik momentleri her zaman *pozitif*tir.

CİSMİN KÜTLE MERKEZİNE GÖRE AÇISAL MOMENTUM: Eğer $\boldsymbol{\omega}$ açısal hızıyla dönen cismin P noktası Şekil 14.8 de görüldüğü gibi cismin kütle merkezi olan M noktasının üstüne taşınırsa, o zaman $\mathrm{P}=\mathrm{M}$ için, (14.14) de $\mathbf{v}_P=\mathbf{v}_M$, $\mathbf{r}_{i/P}=\mathbf{r}_{i/M}$ yerleştirmesi yapıldığında $\int \mathbf{r}_{i/M}\,\mathrm{d}m=\mathbf{0}$ olur ve o zaman kütle merkezi M ye göre açısal momentum:

$$\mathbf{H}_M=\int_m \mathbf{r}_{i/M}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_{i/M}\right)\mathrm{d}m \tag{14.17}$$



Sabit O noktası etrafında dönme

Şekil 14.7

14.4 KARTEZYEN TAKIMDA AÇISAL MOMENTUM

Vektörel denklemler (14.16) ile (14.17) yi daha etkili kullanabilmek için açısal momentum ifadesini skaler yapıda düzenleyelim. Gösterim basitliği nedeniyle aynı yapıdaki her iki vektörel ifadeyi indislerden arınmış bir vaziyette aşağıda görüldüğü gibi yazalım:

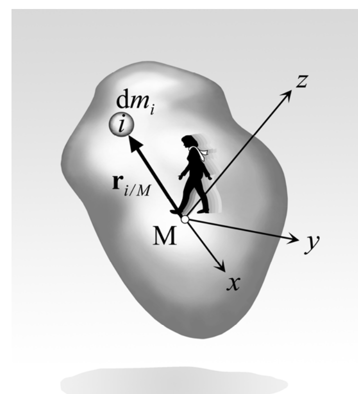
$$\mathbf{H}=\int_m \mathbf{r}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\right)\mathrm{d}m \tag{14.18}$$

Burada

$$\mathbf{H}=H_x\mathbf{i}+H_y\mathbf{j}+H_z\mathbf{k}\ ,\ \ \mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}\ ,\ \ \boldsymbol{\omega}=\omega_x\mathbf{i}+\omega_y\mathbf{j}+\omega_z\mathbf{k}$$

vektörlerini yerleştirip, sırasıyla önce vektörel çarpımları ve sonra integrasyon işlemini tamamlayalım. Şimdi karşımıza çıkan vektörel eşitliği özdeş olarak sağlatabilmek amacıyla eşitliğin iki yanındaki birim vektörler $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ve $\mathbf{k}$ nın katsayılarını birbirlerine eşitlersek,

$$\boxed{\begin{aligned} H_x&=I_{xx}\omega_x-I_{xy}\omega_y-I_{xz}\omega_z\\ H_y&=-I_{yx}\omega_x+I_{yy}\omega_y-I_{yz}\omega_z\\ H_z&=-I_{zx}\omega_x-I_{zy}\omega_y+I_{zz}\omega_z \end{aligned}} \tag{14.19}$$



Şekil 14.8

elde edilir. Hatırlatmak gerekirse $I_{xy}=I_{yx}$, $I_{zx}=I_{xz}$ ve $I_{zy}=I_{yz}$ dir. Açısal momentum bağıntıları (14.19) genel ifadeler olup, cisim ister kütle merkezi M ye göre ister sabit bir O noktasına göre $\boldsymbol{\omega}$ açısal hızıyla dönüyor olsun, geçerlidir. Yalnız unutmamak gerekir, her iki durumda da, eksen takımı (x,y,z) rijit cisme iliştirilmiştir. Ancak bu koşul altında (14.19) daki eylemsizlik momentleri zaman içinde değişmezler.

Eğer işlemler *asal takım* üstünden sürdürülürse, o zaman çarpım eylemsizlik momentleri $I_{xy}=I_{xz}=I_{yz}=0$ olur ve (14.19) daha da sadeleşir:

$$\boxed{H_x=I_{xx}\omega_x\quad,\quad H_y=I_{yy}\omega_y\quad,\quad H_z=I_{zz}\omega_z} \tag{14.20}$$